COMENTARIOS BIBLIOGRÁFICOS

José Ferreirós Domínguez y Abel Lassalle Casanave (coords.), *El árbol de los números: cognición, lógica y práctica matemática*, Sevilla, Universidad de Sevilla, 2016, 249 pp.

La matemática entendida como un edificio ha sido una metáfora muy popular. Los estudios de sus "fundamentos" o "cimientos" han supuesto un esfuerzo intelectual considerable. Reconociendo la valía de tal empresa, Ferreirós Domínguez y Lassalle Casanave optan, en este libro, por una metáfora diferente: la matemática como un árbol. La elección se justifica (apuntan los coordinadores de esta obra) en la intención de atender al estudio de las "raíces", pero incorporando asimismo el interés intelectual por las "ramas y frutos" del árbol de la matemática. Tal modificación de punto de vista amplía los aspectos considerados y enriquece el tratamiento de las cuestiones tradicionales. Este enriquecimiento temático hace justicia a ciertos importantes cambios ocurridos en el análisis filosófico de las ciencias formales en los últimos veinte años: un creciente interés por los aspectos cognitivos y, en general, por la actividad o práctica matemática. En línea con esta perspectiva, el libro se divide en tres partes, tituladas respectivamente: Cognición, Lógica y Práctica matemática.

La sección titulada "Cognición" reúne tres trabajos: "¿Dónde situar los fundamentos cognitivos de la matemática?", de Valeria Giardino, "La cognición de los enteros: una nueva propuesta" cuyos autores son Tatiana Arrigoni y Bruno Caprile y "Filosofía de la biopsicología del número" de Hourya Benis Sinaceur. El trabajo de Giardino se propone explotar filosóficamente ciertos resultados experimentales que se relacionan con las capacidades matemáticas de animales, niños e integrantes de poblaciones cuyo lenguaje no discrimina números mayores a 4. Para lograrlo identifica tres niveles en relación a las competencias requeridas para hacer aritmética y geometría. El nivel I "concierne a la organización de nuestra percepción"; en el nivel III ya se tiene el correspondiente "conocimiento abstracto y formal". El nivel II ("contar", para el caso de la aritmética, "hacer mapas" para el caso de la geometría) resultará de especial interés, pues es allí donde la autora sostiene que la interacción naturaleza-cultura se manifiesta a través del recurso a aquellas "herramientas" cognitivas que permiten al ser humano representar o subrogar "algo más". Para indagar el fundamento cognitivo de las matemáticas es necesario apelar a este nivel.

El desafío que se proponen enfrentar Arrigoni y Caprile es cómo adquirimos los enteros positivos. Contrastan la existencia de al menos dos teorías en la representación adulta de los enteros: una cardinal y otra objetual. Sin embargo, no todos los estadios de desarrollo ontogénico evidencian tal característica. Por ejemplo, los preescolares poseerían exclusivamente una representación cardinal; no contarían con una teoría de los enteros como objetos abstractos. Pero sin esta, no habría posibilidad de aprehender ni el principio de sucesión, ni la infinitud de los enteros. La hipótesis que defienden Arrigoni y Caprile es que "en la ontogénesis de la cognición humana de los enteros juega un papel fundamental la habilidad de los niños de a) tratar los enteros como objetos, b) hacer esto a pesar de que no tengan características espacio-temporales … y c) adscribirlos a un tipo determinado" (p. 63).

Hourya Benis Sinaceur propone un lúcido e impresionante panorama de la investigación experimental acerca de nuestras "aptitudes numéricas". Este panorama le sirve a la autora para extraer una diversidad de profundas observaciones e interrogantes filosóficas. Entre ellas, la de hacer emerger relevantes supuestos filosóficos subyacentes, en relación a esfuerzos que lucen como desprovistos de tales asunciones. Aquellos modelos de vocación puramente empírica se revelan según la autora "como tributarios de puntos de vista correspondientes a una preferencia filosófica o a un estado del desarrollo de la ciencia y la cultura caracterizado por la abundante utilización de estructuras como útil de investigación, organización y de análisis de los datos (estructuras gestaltistas de forma, estructuras conjuntistas y funciones de transferencia, y otros aún)" (p. 111).

La sección titulada "Lógica" consta de cuatro ensayos: "Números como propiedades de segundo orden", de Oswaldo Chateaubriand, "Relaciones euclidianas de equinumerosidad" de Frank Sautter, "Gödel *versus* Hilbert y su concepción simbólica de conocimiento matemático" de Sérgio Shultz y "A vueltas con la intuición y el conocimiento matemático" de Concha Martínez Vidal.

El ensayo de Chateaubriand propone articular dos intuiciones fregeanas: que las atribuciones numéricas no son a cosas sino a conceptos y que los números son objetos. El autor se plantea por qué no tomar las propiedades (que son usadas en las atribuciones numéricas) como los números. Según Chateaubriand, que los números sean propiedades de segundo orden "no es una idea problemática en sí, pero de alguna manera sí lo es" (p. 126). Enfrentando tales dificultades, este filósofo cierra el ensayo con sugerentes ideas que combinan consistencia, solidez y audacia.

Frank Sautter presenta un trabajo que conjuga una fina sensibilidad filosófica y una sólida elaboración técnica.

La cuestión que origina el mismo puede inscribirse en una larga tradición matemática y conceptual: la de evaluar el comportamiento de un concepto formal en relación a su contrapartida intuitiva. Como recuerda el autor, "Cantor encontró una manera sistemática de asignar números a los conjuntos infinitos"; el problema es que "la solución de Cantor en algunos casos es contraria a la intuición" (p. 131). Sautter procura desarrollar alternativas más adecuadas a nuestras intuiciones, obteniendo resultados muy interesantes al respecto.

Schultz plantea con estimable precisión el problema que será objeto de su trabajo: "conciliar el platonismo gödeliano y su crítica a los lógicos de su tiempo, con su crítica al platonismo en los años de 1930 y su adhesión a la tradición metamatemática" (p. 147). La respuesta de este autor es que en realidad el programa de Hilbert (entendido en el sentido que Lassalle Casanave desarrolla en su artículo de este volumen) funcionó como el marco (tanto lógico como conceptual) del trabajo técnico y la perspectiva filosófica de Gödel. Sus propios resultados lo habrían llevado a abandonar dicho marco y a adherir al platonismo. La claridad y precisión de los argumentos de Schultz hacen su ensayo muy estimable.

Concha Martínez Vidal enfrenta una cuestión mayor: la de captar la siempre escurridiza noción de intuición. Señala esencialmente tres desafíos: identificar cuál es el tipo de "fuente o procedimiento" en que consiste la intuición, hasta qué punto la misma provee "fundamento epistémico" y si "las creencias resultantes pueden considerarse como creencias a priori" (p. 172). Analiza Martínez Vidal las propuestas de tres autores: Gödel, Parsons y Bealer. Su conclusión es, respecto de tales intentos, desesperanzada, pero, criteriosamente, la autora deja abierto el desafío original.

La última sección del libro se titula "Filosofía de la práctica matemática" e incluye tres artículos: "Sobre la certeza aritmética" de José Ferreirós Domínguez, "Conocimiento simbólico y aritmética en Hilbert" de Abel Lassalle Casanave y "Números y proposiciones numéricas en las formalizaciones de la aritmética de Peano, Gödel y Whitehead-Russell" de José Miguel Sagüillo.

Ferreirós propone procurar entender la matemática a partir de una "*red de prácticas* y de estratos cognoscitivos, que en último término enlaza con prácticas y técnicas concretas como las de contar y medir" (pp. 193-194). La posición que ocupa la aritmética en la misma determinaría su fiabilidad: esta gozaría de certeza mientras lo mismo no ocurriría, por ejemplo, con la geometría euclidiana o la topología. Tal posición se debería al vínculo privilegiado de la aritmética con "nuestras prácticas de contar". Como certeramente señala el autor, es necesario preguntarse qué teoría aritmética puede ocupar tal posición. Ferreirós considera que los axiomas de Peano, para decirlo con sus palabras, "son verdaderos de los números de contar". El artículo se cierra con una lúcida y profunda consideración de las posibles críticas a la propuesta.

Lassalle Casanave desarrolla en su trabajo tres líneas argumentales. La primera se orienta a mostrar la centralidad de la dualidad conocimiento intuitivo-conocimiento simbólico para comprender un conjunto de dualidades presentes en la obra de Hilbert: real-ideal, finito-transfinito, concreto-abstracto... La segunda esboza una interpretación original del formalismo hilbertiano: se trata de entender el mismo en clave metodológica. La tercera apunta a entender la aritmética finitaria como lo que el autor denomina "*sucedáneo del conocimiento intuitivo*" y a la aritmética formal como "conocimiento simbólico del tipo que denominamos ´formal´" (p. 219). En relación con la primera de ellas, el autor muestra satisfactoriamente que el contraste entre los primeros y segundos términos de las oposiciones mencionadas no se deja atrapar por una versión general más o menos esquemática. En relación con la segunda, Lassalle Casanave propone entender el formalismo hilbertiano no reduciendo sin más la práctica matemática a los correspondientes sistemas formales, sino como estrategia metodológica, a saber: en tanto objeto de análisis metateórico. En relación con la tercera, el autor desarrolla aquel contraste entre un uso subrogatorio de los símbolos y un uso más ambicioso que nos permitiría obtener el conocimiento de "formas" o "estructuras". Escrito con rigor y elegancia, el artículo se cierra con una sugestiva hipótesis acerca de la ontología hilbertiana de las teorías formales.

Sagüillo se propone comparar tres formalizaciones de la aritmética, elaboradas, respectivamente, por Gödel, Peano y Whitehead-Russell. La comparación se interesa por los contrastes técnicos entre las mismas, pero el autor logra mostrar, además, la relevancia filosófica de tales diferencias. Sagüillo centra atinada y fecundamente la discusión en torno a las diversas nociones de "universo de discurso". Más específicamente, distingue entre dominio de investigación y universo de discurso de una formalización y sus relaciones en los diversos autores estudiados. Las conclusiones del trabajo iluminan, desde el punto de vista filosófico, los contrastes entre el platonismo de Gödel, el logicismo de Russell y la peculiar posición de Peano (metodológicamente afín al tratamiento técnico de sus contemporáneos de la aritmética, pero no coincidente con la tesis de reductibilidad de la misma a la lógica). El trabajo combina ejemplarmente solvencia técnica y sensibilidad filosófica.

En síntesis, el libro ofrece un rico y estimulante panorama de diversos aspectos de la filosofía de la práctica matemática, elaborado con calidad y originalidad, delineando un espectro de preocupaciones intelectuales más hospitalario que el tradicionalmente orientado por la cuestión de fundamentos.

JOSÉ SEOANE
UdelaR-SNI