El reto de Hilbert en la teoría de las magnitudes poligonales: Un capítulo en la axiomatización sintética de la geometría euclidiana

EDUARDO N. GIOVANNINI
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
Universidad Nacional del Litoral

Resumen: El artículo ofrece una interpretación de las contribuciones de David Hilbert a la teoría de las magnitudes poligonales, desarrollada en su influyente monografía *Fundamentos de la geometría*, publicada en 1899. Se argumenta que la construcción de esta parte central de la geometría euclidiana representó para Hilbert un desafío muy significativo, en razón de su objetivo general de proporcionar una axiomatización *estrictamente sintética* de esta teoría geométrica; es decir, en virtud de sus conocidos requerimientos metodológicos y epistemológicos de construir la geometría elemental evitando toda apelación esencial a presupuestos numéricos. Se sostiene además que dicho desafío consistió en ofrecer un nuevo fundamento *lógicamente sólido* para la teoría del área poligonal, pero que al mismo tiempo pueda ser considerado como *puramente geométrico*.

Palabras clave: Hilbert, geometría, axiomática, equivalencia, área plana.

Hilbert's Challenge in the Theory of Polygonal Magnitudes: A Chapter in the Synthetic Axiomatization of Euclidean Geometry

Abstract: The paper offers an interpretation of David Hilbert's contributions to the theory of polygonal magnitudes, developed in his influential monograph *Foundations of Geometry*, published in 1899. It is argued that the construction of this central part of Euclidean geometry presented an appealing challenge to Hilbert''s general aim of providing a *purely synthetic* axiomatization of this geometrical theory; in other words, to his epistemological and methodological concerns of constructing elementary geometry without resorting to any kind of numerical assumption. Moreover, it is claimed this challenge consisted in offering a new foundation for the theory of polygonal area, which could be considered at the same time as *logically sound* and *purely geometrical*.

Keywords: Hilbert, geometry, axiomatic method, plane area, equivalence.

1. Introducción

La elucidación y clarificación conceptual de la noción de magnitud en general, y de magnitud geométrica en particular, fue un objetivo manifiesto y reconocido de la matemática del siglo XIX. En efecto, gracias a las contribuciones de célebres matemáticos tales como B. Bolzano, H. Grassmann, B. Riemann y O. Stolz, entre otros, el concepto fundamental de magnitud, que en gran medida constituyó la base de la matemática "clásica" desde el tiempo de los griegos hasta la mitad del siglo XIX, pasó de ser una noción esencialmente vaga para convertirse en un concepto definido de un modo matemáticamente preciso y riguroso. Como es bien sabido, la axiomática abstracta –otra contribución notable de la matemática (de fines) del siglo XIX– constituyó una herramienta esencial en el proceso de rigorización del concepto general de magnitud.[1]

En lo que respecta puntualmente a las distintas clases de magnitudes geométricas, las áreas de las figuras rectilíneas planas constituyen un caso de estudio particularmente interesante. Este interés puede explicarse, al menos, en virtud de dos razones principales. Por un lado, las áreas poligonales representan un ejemplo de magnitudes geométricas cuyo análisis no resulta tan simple como las longitudes y las amplitudes angulares, ni tan complejo como los volúmenes. Por otro lado, la teoría de las magnitudes poligonales resulta muy interesante desde el punto de vista de los *fundamentos*, puesto que se trata de una teoría que puede ser construida de un modo tal que se evite toda apelación a *procesos infinitos*, tales como el "paso a límites (comunes)" que constituye la base del conocido método de exhaución empleado en el estudio de los sólidos.

Ahora bien, aunque en la literatura no ha sido aún suficientemente reconocido, una contribución muy importante de David Hilbert (1862-1943) en su influyente monografía *Fundamentos de la geometría*[2], publicada originalmente en 1899, fue haber ofrecido por primera vez una exposición sistemática y rigurosa de la teoría del área de las figuras rectilíneas planas.[3] Este carácter riguroso no solo se explica en virtud de que la teoría del área en el plano fue presentada por primera vez en el contexto de una teoría axiomática formal, sino además porque Hilbert consiguió proporcionar una prueba rigurosa de lo que en aquella época era comúnmente designado como "el principio fundamental" de las magnitudes poligonales. Este principio, formulado por primera vez por el matemático italiano Antonio de Zolt (1847-1926), reza en su versión original de la siguiente manera: "Si un polígono es dividido en partes de un modo cualquiera, no es posible, prescindiendo de una de esas partes, disponer las partes restantes de tal modo que cubran enteramente el polígono" (Zolt 1881: 12).

Dicho de un modo esquemático, la función que se le reconocía a este "principio fundamental" –también conocido como el "postulado de Zolt"– en los tratados geométricos de la época consistía en hacer posible la introducción de una relación de *desigualdad* para las figuras rectilíneas planas. Más precisamente, la admisión del postulado de Zolt como un "nuevo axioma"

[1] Sobre la importancia de la noción de magnitud, y de su clarificación conceptual, para la matemática del siglo XIX, puede consultarse Ferreirós 2007.

[2] En adelante utilizaré la expresión *"Fundamentos"* para referirme a *Fundamentos de la geometría* de Hilbert.

[3] Esta falta de reconocimiento puede notarse, por ejemplo, en el hecho de que la teoría del área de Hilbert no ha sido todavía objeto de un estudio específico.

de la geometría permitía garantizar la existencia de una *relación de orden (lineal)* para los polígonos planos, condición necesaria para una construcción adecuada de la teoría del área.

El objetivo de este artículo es ofrecer una interpretación de la reconstrucción de la teoría de las magnitudes poligonales llevada a cabo por Hilbert en *Fundamentos*. En primer lugar, intentaré mostrar que dicha reconstrucción estuvo *motivada* por un intenso e interesante debate, que tuvo lugar en las últimas décadas del siglo XIX, respecto del papel del "postulado de Zolt" en la teoría del área. En segundo lugar, sostendré que, dado el reconocido objetivo de Hilbert de proporcionar una axiomatización estrictamente sintética de la geometría elemental, la construcción de la teoría del área representó un *desafío muy importante*. Más precisamente, argumentaré que este desafío consistía en proporcionar un *nuevo fundamento* para esta parte central de la geometría elemental, que sea a la vez *lógicamente sólido* y *estrictamente geométrico*, i.e., un fundamento en el que se evite toda referencia esencial a supuestos y consideraciones numéricas. Por último, defenderé que un aspecto medular del "reto de Hilbert" en la teoría de las magnitudes poligonales consistió en encontrar una prueba del mencionado "principio fundamental", que sea completamente consistente con aquellos estrictos requerimientos epistemológicos y metodológicos establecidos para su axiomatización de la geometría.

Mi estrategia será la siguiente: en la sección 2 realizaré unas breves aclaraciones conceptuales y terminológicas sobre el concepto de área en la geometría plana, que resultarán relevantes para las discusiones subsiguientes. Seguidamente, en la sección 3, comentaré muy brevemente las ideas centrales de un debate sobre la teoría de la equivalencia de polígonos planos, que constituyó el contexto inmediato de las contribuciones de Hilbert. En la sección 4 me ocuparé de presentar el llamado "principio fundamental" de las magnitudes poligonales y de comentar su función específica en la teoría del área. A continuación, en la sección 5, me encargaré de identificar los requerimientos epistemológicos y metodológicos establecidos por Hilbert para su construcción de esta parte central de la geometría elemental. Luego, en la sección 6, analizaré dicha construcción de acuerdo con su presentación final en *Fundamentos*. Concluiré el trabajo con algunas reflexiones sobre las consecuencias epistemológicas de esta contribución técnica de Hilbert.[4]

[4] A menos que sea explícitamente indicado, todas las traducciones son de mi autoría.

2. Acerca de la teoria de las magnitudes poligonales

Para comenzar, resultará conveniente introducir algunas distinciones conceptuales y terminológicas. En este trabajo, al hablar de polígonos planos tendré en mente *exclusivamente* lo que actualmente se entiende por "polígono simple", a saber: todo aquel polígono en el que todos los vértices son distintos unos de otros, ningún vértice cae en un lado y dos lados cualquiera no tienen entre sí punto común. Utilizaré el término "área" de un modo general para referirme a la *cantidad de superficie* de un polígono (simple) en el plano. Es decir, si la superficie o *extensión superficial* es la *magnitud* definida por el conjunto de los polígonos en el plano, la *cantidad de esta magnitud* se denomina área; Hilbert emplea el término "contenido superficial" *(Flächeninhalt)* –o a veces simplemente "contenido" *(Inhalt)*– para referirse de un modo general a la noción de área de un polígono plano. Entenderé aquí por "magnitud" a la cualidad común que hace que los elementos de un conjunto de objetos geométricos sean igualables y sumables. Del mismo modo, diré que todos los elementos de dicho conjunto iguales entre sí tienen la misma cantidad de esta magnitud. En otras palabras, la *cantidad* es lo que tienen en común los elementos iguales entre sí, mientras que la *magnitud* es el carácter común a todos los elementos del conjunto.[5]

Ahora bien, es posible identificar dos modos distintos según los cuales la noción de área de una figura rectilínea plana puede ser abordada y conceptualizada. Por un lado, un abordaje puramente geométrico que consiste en *comparar las áreas* de las figuras rectilíneas planas sobre la base de la relación de congruencia geométrica. Este abordaje "puramente geométrico", conocido como la teoría de la equivalencia de polígonos, consiste en establecer la igualdad de área o "equivalencia" de un par de polígonos planos a partir de la posibilidad de su descomposición y/o composición en otros polígonos componentes congruentes uno-a-uno; de acuerdo con esta perspectiva, el área de un polígono plano puede ser definida estrictamente como una *clase de equivalencia*. Más precisamente, si $\mathcal{P}$ es el conjunto de los polígonos planos y A una determinada relación de "igualdad de área", dicha relación determina el *conjunto cociente* $\mathcal{P}/A = \mathcal{P}_A$, es decir, el conjunto de las clases de equivalencia en las que queda partido el conjunto $\mathcal{P}$ mediante la relación (de equivalencia) A. Luego, se llama *área de un polígono* a cada una de las *clases de equivalencia* del conjunto cociente $\mathcal{P}_A$.

[5] Sobre esta distinción puede verse Puig Adam 1980.

Por otro lado, un abordaje "métrico", que consiste en desarrollar una *teoría de la medida* de la cantidad de superficie de un polígono plano. Este abordaje métrico consiste así en introducir funciones de *medida de área* que asignan a cada una de las distintas figuras rectilíneas en el plano un número (real) positivo, por lo general de acuerdo con las fórmulas habituales que toman como unidad de medida al cuadrado de lado unidad. De acuerdo con esta perspectiva, el área de un polígono plano es, en cambio, un *número (real) positivo*.[6]

La expresión "teoría de las magnitudes poligonales" refiere por lo tanto a la teoría del área de los polígonos planos en un sentido general, es decir, al estudio de la (cantidad de) *magnitud* específica definida por estas figuras geométricas. Dicho estudio puede llevarse a cabo por medio del establecimiento de una teoría de la medida de área de los polígonos planos, a través del desarrollo de una teoría geométrica de la equivalencia (o igualdad de área) de dichas figuras geométricas, o por medio de una combinación de ambas teorías.

Es oportuno mencionar que aunque en los actuales tratados de geometría resulta habitual desarrollar la teoría de las magnitudes poligonales a partir de la teoría de la medida de área, caracterizando además esta última noción como una función que toma *valores numéricos*, la gran mayoría de los manuales de geometría de fines del siglo XIX buscaban en cambio proporcionar en primer lugar un fundamento sólido para la teoría geométrica de la equivalencia, para luego construir sobre esta una teoría de la medida.[7] Este proceder obedecía a una idea muy difundida y compartida entre los geómetras de la época: la posibilidad de desarrollar una teoría de la medida de las áreas poligonales presuponía que se haya *demostrado* previamente que los polígonos planos determinan efectivamente una clase de magnitudes geométricas, y para no recaer en una argumentación circular, dicha prueba debía ser obtenida sobre la base de la teoría geométrica de la equivalencia. Para los geómetras de fines del siglo XIX, la teoría geométrica de la equivalencia tenía así una *prioridad epistemológica y metodológica* por sobre la teoría de la medida de área.

Esta importancia depositada sobre la noción geométrica de equivalencia de polígonos permite explicar que, en las últimas tres décadas del siglo XIX, principalmente en Italia, Francia y Alemania, esta teoría fue

[6] En adelante, utilizaré el término "medida de área" para referirme al concepto métrico de área de un polígono plano.

[7] Esta estrategia puede apreciarse cabalmente, por ejemplo, en Faifofer 1880, Enriques y Amaldi 1903, dos manuales muy influyentes hacia fines del siglo XIX y comienzos del XX.

objeto de un intenso estudio y de un interesante debate. Más aún, dichas discusiones constituyen el contexto inmediato que dio lugar a las investigaciones de Hilbert sobre la teoría del área. Resultará de provecho indicar algunas de las ideas centrales de estas discusiones.[8]

3. La teoria de la equivalencia geométrica

Las discusiones recién mencionadas sobre la teoría de la equivalencia de polígonos tuvieron como referencia fundamental la teoría del área desarrollada por Euclides en los primeros seis libros de *Elementos*. Ello se explica en virtud de que, hacia fines del siglo XIX, las proposiciones sobre la igualdad de área de polígonos incluidas en el libro primero –I.35 a I.48– constituían el núcleo fundamental de la teoría del área. El objetivo manifiesto de estos geómetras decimonónicos fue proporcionar un nuevo fundamento, *lógicamente riguroso*, para aquella teoría geométrica. Qué debe entenderse aquí por "lógicamente riguroso" quedará más claro en lo que sigue.

El problema del área de los polígonos planos aparece tempranamente en *Elementos*. La proposición 35 del libro I reza de la siguiente manera:

I.35. Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

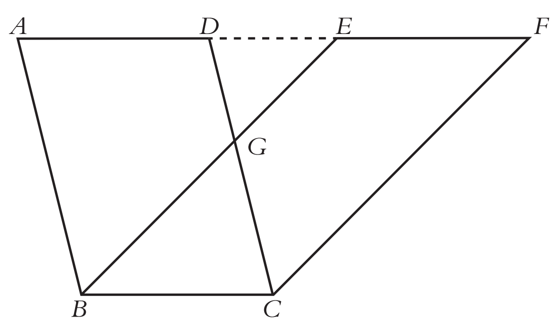

Figura 1: *Elementos*, I.35

La estrategia que utiliza Euclides para demostrar aquí la "igualdad" (de área) de los dos paralelogramos consiste en *sumar y quitar figuras respecti-*

[8] Para un examen de estas discusiones véase Volkert 1999.

vamente congruentes, operaciones que funda en las condiciones establecidas en las *nociones comunes*. Más precisamente, apelando a las proposiciones I. 29 y I. 34, prueba primero que los triángulos *ABE* y *DCF* son iguales, en el sentido de congruentes. Enseguida, señala que los trapecios *ABGD* y *EGCF* se obtienen de quitarle a aquellos triángulos el mismo triángulo *DGE*, de donde se sigue que son iguales por la noción común 3 ("Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales"). Pero los paralelogramos *ABCD* y *EBCF* se obtienen de añadir el mismo triángulo *BCG* a aquellos trapecios iguales, de donde se puede concluir que son iguales por la noción común 2 ("Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales").

Dicho de un modo esquemático, la característica fundamental del tratamiento del área de las figuras rectilíneas planas que se encuentra en *Elementos* consiste en que la noción de "igualdad de área" no es definida en ningún momento de manera explícita, sino que en cambio es introducida como una *relación no definida* que satisface ciertas propiedades básicas expresadas en las *nociones comunes*. Más aún, esta aplicación sistemática de las nociones comunes en el estudio de las áreas poligonales se funda en la suposición básica según la cual estas constituyen *una clase de magnitudes geométricas*, es decir, que se puede definir para ellas una operación de suma y una relación de igualdad (no trivial), tal que se cumple la ley de tricotomía (utilizando terminología moderna).

Las propiedades tomadas de las nociones comunes, que Euclides utiliza en las demostraciones de las proposiciones sobre la "igualdad de área" de polígonos, son las siguientes:

1. Figuras congruentes son iguales (en área).
2. Figuras iguales (en área) a una tercera, son iguales (en área) entre sí.
3. Sumas de figuras iguales (en área) son iguales en área.
4. Diferencia de figuras iguales (en área) son iguales en área.
5. Las mitades de figuras iguales (en área) son iguales en área.
6. Una figura es mayor (en área) que cualquiera de sus partes.
7. Si un par de cuadrados son iguales (en área), entonces sus lados son iguales (congruentes).

La crítica central que recibió la teoría del área desarrollada por Euclides en *Elementos*, en la segunda mitad del siglo XIX, estaba dirigida al papel que desempeñaban las nociones comunes. En efecto, la idea fundamental de estos geómetras era que, si lo que se buscaba era proporcionar un fundamento lógicamente sólido para la teoría de la equivalencia, entonces las relaciones de igualdad y desigualdad de área, junto con la operación de suma de polígonos, debían ser definidas explícitamente de un modo adecuado y sus propiedades fundamentales debían ser demostradas a partir de estas definiciones. En otras palabras, lo que se exigía era que las propiedades (de la relación de "igualdad de área") expresadas en las nociones comunes no sean simplemente tomadas como axiomas o principios indemostrables de la geometría, sino que sean demostradas a partir de aquellas definiciones matemáticamente exactas. Este nuevo procedimiento permitiría, además, *probar* que los polígonos planos constituyen una clase de magnitudes geométricas, a saber: la extensión superficial.

Uno de los geómetras que formuló esta crítica con mayor claridad fue el matemático francés Jean-Marie Duhamel (1797–1872), en una obra, de naturaleza no sólo matemática sino también filosófica, titulada *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* (1866-1872). Para ilustrar esta objeción al método de Euclides, Duhamel toma como ejemplo la noción común 5 de *Elementos*, es decir, el conocido principio según el cual "el todo es mayor que las partes":

> De esta manera, de acuerdo con el sentido que le hemos dado a las palabras "todo", "parte", "mayor" y "menor", se observa que un todo es mayor que una de sus partes, o que la parte es menor. Por lo tanto, es un error haber hecho de esta proposición un axioma fundamental que numerosos autores de tratados de geometría han exigido que sea admitida como evidente, ubicándola así entre sus postulados o verdades indemostrables. Esta equivocación, ciertamente seria, consiste en tomar por una "verdad de intuición" (*vérité de sentiment*) algo que no es sino una "verdad por definición". (Duhamel 1878: 7)

El requerimiento que expresa aquí Duhamel para la construcción rigurosa de la teoría de la equivalencia, que se convirtió rápidamente en un criterio adoptado en todos los manuales de geometría de la época, era así el siguiente: la propiedad fundamental de la equivalencia de polígonos, según la cual un polígono no puede ser equivalente con una parte propia suya, no debe ser tomada como un axioma, sino que debe ser demostrada a partir de las definiciones de igualdad y desigualdad de área, y de suma de polígonos. Del mismo modo, este mismo criterio debía ser aplicado al resto de las propiedades fundamentales de la relación de "igualdad de área".

Ahora bien, en lo que respecta a la relación de equivalencia de polígonos, Duhamel propuso la siguiente definición: "dos magnitudes de una especie cualquiera se llaman equivalentes cuando están compuestas de partes respectivamente iguales, o cuando son límites de magnitudes compuestas de partes respectivamente iguales" (Duhamel 1878: 446). Esta definición se corresponde con bastante exactitud con lo que actualmente se conoce como la relación de *equidescomposición*: dos polígonos son equidescomponibles si es posible descomponerlos en el mismo número de polígonos partes congruentes en parejas o uno-a-uno.[9] Hasta la aparición de *Fundamentos* de Hilbert en 1899, todas las reconstrucciones de la teoría geométrica de la equivalencia estuvieron basadas en esta relación de equidescomposición.

Además de formular esta definición explícita de la relación de igualdad de área de polígonos, Duhamel indicó en su libro cómo debía procederse a los efectos de proporcionar un nuevo fundamento riguroso para la teoría de la equivalencia de polígonos, a saber: debían proporcionarse nuevas demostraciones de las proposiciones fundamentales contenidas básicamente en libro I de *Elementos*, utilizando para ello estrictamente la definición de "igualdad de área" o equivalencia y los conocidos teoremas sobre la congruencia de triángulos, paralelogramos y demás figuras rectilíneas planas.

Esta tarea fue llevada a cabo principalmente por el matemático italiano Aureliano Faifofer (1849-1909) en un manual de geometría que ejerció una influencia notable en la época. En sus *Elementi di geometria*, Faifofer desarrolló nuevas demostraciones de todas las proposiciones habituales sobre la igualdad de área de polígonos, siguiendo cuidadosamente el método de demostración pensado por Duhamel. Por ejemplo, entre estas demostraciones se destacan las pruebas de la proposición I.35 de *Elementos* –que hemos enunciado recién– y del conocido teorema del Gnomon (es decir, la proposición I.43 de *Elementos*). Sin embargo, el aspecto más importante de la reconstrucción de Faifofer de la teoría de la equivalencia residió en que allí se ofrecieron por primera vez demostraciones de (algunas de) las propiedades fundamentales de la relación de igualdad de área, desarrolladas exclusivamente sobre la base de la definición explícita de equivalencia (i.e., equidescomposición) y de los teoremas de congruencia de las diversas clases de polígonos planos. Por ejemplo, Faifofer demuestra que "dos superficies equivalentes a una tercera son equivalentes entre sí" y que "si se suman superficies equivalentes a superficies equivalentes, entonces se obtendrán superficies equivalentes" (véase Faifofer 1880).

La presentación de Faifofer constituyó un avance importante en la "rigorización" de la teoría de la equivalencia de polígonos y se convirtió muy rápidamente en la referencia fundamental de la teoría, hacia las últimas dos décadas del siglo XIX; sin embargo, no estaba exenta de problemas. Diversos matemáticos notaron que dicha reconstrucción presentaba un problema importante cuando debía enfrentarse a la demostración de uno

[9] Esta definición fue sugerida por primera vez por Gerwien 1833.

de los teoremas centrales de la teoría, según el cual "si dos triángulos son iguales (en área) y tienen bases iguales, entonces sus alturas relativas son iguales entre sí", esto es, el teorema correspondiente a la proposición I.39 de *Elementos*. Más precisamente, en un breve tratado titulado *Principii della eguaglianza di poligoni*, publicado en 1881, el matemático italiano Antonio de Zolt (1847-1926) realizó una serie de consideraciones críticas sobre la teoría de la equivalencia que en gran medida promovieron las investigaciones de Hilbert.

4. El principio fundamental de las magnitudes poligonales

Hemos señalado en la sección anterior que las dificultades principales con la nueva fundamentación de la teoría de la equivalencia de polígonos estaban vinculadas con la demostración de la proposición I.39 de *Elementos*. Recordemos rápidamente la prueba de Euclides.

I.39. Los triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.

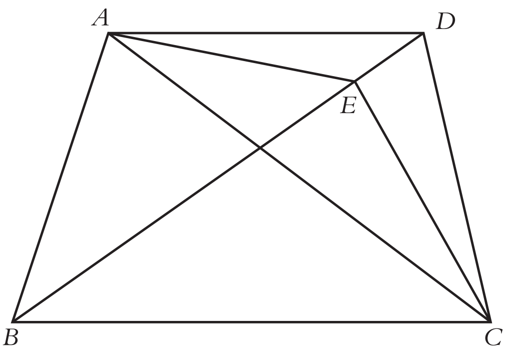

Figura 2: *Elementos*, I.39

La prueba de Euclides es indirecta o por el absurdo. Sean *ABC* y *DBC* los dos triángulos de igual área que están sobre la misma base *BC* (Fig. 2). Hay que probar que *BC* es paralela a *AD*. Pues supongamos que *AD* no es paralela a *BC*, entonces por I.31 sabemos que es posible trazar desde el punto *A* una recta paralela a *BC*, que designamos *AE*. Luego, el triángulo *ABC* es igual al triángulo *EBC*, ya que están en la misma base y en la misma paralela (I.37). Dado que *ABC* es igual a *DBC*, por la noción común 1 se sigue que *DBC* es igual a *EBC*. Sin embargo, ello no es posible, ya que en ese caso el mayor (*DBC*) sería igual a la parte (*EBC*), lo cual contradice la noción común 5. De allí se sigue que *AE* no es paralela a *BC*. De la misma manera se puede probar que cualquier otra recta trazada desde *A*, y distinta de *AD*, no es paralela a *BC*; por lo tanto, *AD* es paralela a *BC*.

Para probar la proposición I.39, Euclides se basa así esencialmente en la aplicación de la noción común 5: "Y el todo es mayor que las partes". Ahora bien, puesto que el objetivo declarado de los geómetras del siglo XIX era proporcionar un nuevo fundamento "lógicamente riguroso" para la teoría euclidiana del área, Faifofer (1880) ofrece una nueva demostración de esta proposición fundamental, en la que se busca evitar la referencia a aquella noción común. Esta nueva demostración es también indirecta y procede como sigue. En primer lugar, comienza mencionando un teorema demostrado previamente, según el cual todo triángulo es equivalente con un rectángulo de igual base y de la mitad de altura.[10] A continuación razona de la siguiente manera: consideremos dos rectángulos equivalentes entre sí, que tienen la misma base y la mitad de altura de los triángulos dados. Supongamos entonces que las alturas de estos triángulos, y por lo tanto las alturas de los rectángulos, son *desiguales*. En ese caso, tendríamos que el rectángulo que tiene menor altura es equivalente con una parte del otro rectángulo. Sin embargo, ello no es posible, puesto que sabemos que los dos rectángulos son equivalentes. En consecuencia, los dos triángulos deben tener la misma altura (véase Faifofer 1880).

El problema fundamental con este esquema de demostración, observó Zolt, era que la inferencia de que los dos rectángulos no son equivalentes, puesto que uno coincide con una parte del otro, no estaba justificada, sino que se apoyaba implícitamente en la proposición según la cual "dos rectángulos que tienen bases iguales y alturas desiguales no son equivalentes" (Zolt 1881: 11). Sin embargo, esta proposición tampoco estaba justificada, sino que se basaba en un principio que resultaba evidente de suyo, en tanto que expresaba una propiedad esencial de las magnitudes geométricas, pero que debía ser explícitamente postulado para que la teoría del área pudiera ser desarrollada de un modo estrictamente deductivo y lógicamente riguroso. La formulación de dicho principio es la siguiente: "Si un polígono es dividido en partes de un modo cualquiera, no es posible, prescindiendo de una de esas partes, disponer las restantes de modo tal que cubran enteramente el polígono" (Zolt 1881: 12).

Podría pensarse que el "postulado de Zolt" –o el *principio fundamental de las magnitudes poligonales*, como era conocido en aquella época– no es sino

[10] Este teorema es una consecuencia inmediata de la proposición I.41 de *Elementos*.

una formulación puramente geométrica y matemáticamente precisa de la noción común 5 para el caso particular de las áreas poligonales. Más aún, la función específica que desempeña este postulado en la teoría del área es garantizar la existencia de una *relación de orden (lineal)* para los polígonos planos, sin la cual la teoría misma no tiene ningún sentido o contenido. En efecto, supongamos que se define una relación de orden de la siguiente manera: dados dos polígonos cualesquiera *P* y *Q*, decimos que *P* es *mayor* que *Q* si y solo si existe un polígono *P',* contenido propiamente en *P*, tal que *P'* y *Q* son equivalentes (i.e., equidescomponibles); es decir, *P* es mayor que *Q* si y solo si *Q* es equivalente a una parte propia de *P*.[11] Es evidente que para que esta definición efectivamente permita introducir una *relación de orden (lineal)* entre los polígonos planos, del hecho de que *P* sea mayor que *Q* se debe seguir que no es posible que *P* sea equivalente con *Q*. Sin embargo, esta imposibilidad no es una consecuencia de la definición de equivalencia de polígonos, sino que debe ser establecida explícitamente en una proposición específica. Luego, esta es la función que desempeña el postulado de Zolt en la teoría del área poligonal.

La inclusión del postulado de Zolt como un nuevo principio de la geometría permitía así completar la nueva fundamentación, "lógicamente rigurosa" y estrictamente deductiva, de la teoría de la equivalencia; sin embargo, dado que en el fondo este postulado establecía, de un modo más preciso, la condición expresada en la noción común 5, se trataba de una proposición que *debía ser demostrada* como un teorema, antes que ser postulada como un nuevo axioma de la geometría. Es por ello que, inmediatamente tras la aparición del libro de Zolt, proliferaron múltiples intentos de demostración, aunque todos ellos fueron infructuosos. Hacia fines del siglo XIX, el esquema seguido en los manuales de geometría consistía entonces en construir la teoría del área plana incluyendo el "principio fundamental" como un *nuevo axioma de la geometría*. Entre los textos más influyentes en los que se sigue esta estrategia se encuentra la segunda edición de Faifofer (1880), Paolis (1884), Stolz (1894) y el muy influyente tratado de Enriques y Amaldi (1903).

Ahora bien, aunque en *Fundamentos* solo se encuentran referencias circunstanciales al respecto, la importancia e influencia de estas discusiones para la reconstrucción de la teoría del área desarrollada allí es manifiesta. En efecto, como veremos en lo sigue, en sus notas manuscritas de clases para cursos de geometría, Hilbert destaca explícitamente que el problema más

[11] Una definición alternativa, pero equivalente, de la relación *mayor que* (y *menor que*) entre polígonos planos es la siguiente: dados tres polígonos cualesquiera *P*, *Q* y *S*, decimos que *P* es mayor que *Q* si *P* es equidescomponible con *Q* + *S*. Véase Puig Adam 1980.

apremiante en la fundamentación rigurosa de la teoría del área residía en la correcta introducción de las *relaciones de orden para los polígonos planos*; más aún, este problema consistía básicamente en encontrar una prueba del "axioma" de Zolt, que sea *adecuada desde un punto de vista metodológico y epistemológico*.

5. El reto de Hilbert en la teoría de las magnitudes poligonales

En el semestre de invierno de 1898-1899 Hilbert impartió un curso titulado "Elementos de la geometría euclidiana" (*Elemente der Euklidischen Geometrie*). Las notas de clases correspondientes a este curso sirvieron de base, poco después, para la elaboración final de la primera edición de *Fundamentos*. En relación a la teoría del área en el plano, Hilbert señala allí lo siguiente:

> Los teoremas [recién] demostrados sobre la equivalencia (*Inhaltsgleichheit*) son completamente rigurosos[12]; sin embargo, en un examen más detallado reconocemos que todos ellos no tienen por el momento contenido alguno. En efecto, *todavía no sabemos en absoluto si existen en general polígonos que tienen distinto contenido* [*superficial*]. Y no solo debemos conocer este hecho, si queremos comenzar algo con nuestros teoremas, sino que además necesitamos el siguiente teorema: Si *A*, *B*, *C*, *D*, *C'*, *D'* son seis puntos, tales que *ABCD* y *ABC'D'* son rectángulos, y *C* se encuentra entre *B* y *C'*, entonces estos rectángulos no son equivalentes. Veremos que solo necesitamos este teorema, que también puede ser expresado de la siguiente manera: si dos triángulos equivalentes tienen la misma base, entonces también tienen la misma altura. (Hilbert 1898: 371. El énfasis es mío)

En primer lugar, Hilbert advierte aquí que el problema central en la construcción de la teoría de la equivalencia consiste en garantizar la existencia de una relación de orden para los polígonos planos. En efecto, si no se establecen relaciones de desigualdad para los polígonos, entonces los conocidos teoremas sobre la igualdad de área no tendrían ningún contenido, puesto que podría llegar a inferirse que estrictamente *todos* los polígonos tienen áreas iguales. En segundo lugar, Hilbert vincula directamente este problema con las discusiones que hemos mencionado sobre la prueba de la proposición I.39 de *Elementos* y su inmediata relación con el teorema según el cual dos

[12] Hilbert se refiere aquí a la ya mencionada proposición I.35 y al teorema según el cual todo triángulo es equivalente con un rectángulo de igual base y mitad altura.

rectángulos con la misma base y alturas desiguales no pueden ser equivalentes.

Ahora bien, respecto de la demostración de I.39, Hilbert realiza en otro de sus cursos la siguiente observación:

> Sin embargo, no se sigue [de lo anterior] el teorema recíproco, según el cual triángulos equivalentes (*Inhaltsgleich*) con la misma base tienen la misma altura. La prueba habitual utiliza así el hecho de que una figura nunca puede ser igual a una parte suya, y ello equivale a la introducción de un nuevo axioma, que Euclides también enuncia. Sin embargo, de ningún modo resulta inmediatamente evidente a partir de los axiomas I-IV que una figura no puede ser equivalente a una parte, en el sentido antes definido [...]. *De la posibilidad de medir las áreas* (*Inhalt*) *por medio de números no se puede hablar todavía aquí, sino más bien que ello debe ser primero demostrado*. (Hilbert 1905: 77. El énfasis es mío.)

Del mismo modo, en un curso un poco posterior, Hilbert realiza una declaración muy interesante respecto de la utilización que hace Euclides del principio "el todo es mayor que la parte" en la prueba de la proposición I.39:

> Este modo de inferencia no está justificado, puesto que una vez que hemos establecido el significado de [la relación de] igualdad de área, entonces no nos está más permitido adoptar aquel principio como un axioma. Esta suposición podría incluso resultar incompatible con nuestra definición de "igualdad de área" (*Inhaltsgleichheit*) [...] Aquí se presenta también un error notorio en el procedimiento de prueba. Si queremos lograr que esta inferencia sea llevada a cabo de un modo correcto, entonces debemos proporcionar una demostración del teorema utilizado por Euclides, según el cual el todo es mayor que la parte. (Hilbert 1917: 90)

Vemos así que, para Hilbert, la construcción de un fundamento lógicamente sólido para la teoría del área exigía que se proporcionara una *demostración* del "axioma de Zolt", i.e., de la formulación matemáticamente precisa y estrictamente geométrica de la noción común 5. En primer lugar, ello se debe a que la imposibilidad de que un polígono sea equivalente con una parte propia no es un hecho que se sigue inmediatamente de la definición de "equivalencia" de polígonos; se trata de una condición que no puede ser simplemente asumida, sino que debe ser demostrada. En segundo lugar, si efectivamente es posible ofrecer una prueba de dicho principio utilizando los axiomas I-IV (incidencia, orden, congruencia y paralelas), entonces ello revelaría que se trata de una proposición que no es independiente de aquellos axiomas; al asumir el postulado como un axioma, se viola el requerimiento de *independencia de los axiomas*, establecido por Hilbert como una condición fundamental para la construcción de todo sistema axiomático.

Ahora bien, es claro que la prueba del "axioma de Zolt" debía además respetar los requerimientos metodológicos y epistemológicos establecidos por Hilbert de un modo general para su axiomatización de la geometría. En primer lugar, en tanto que uno de sus objetivos centrales en *Fundamentos* era ofrecer una *axiomatización estrictamente sintética* de la geometría euclidiana, la mentada demostración debía evitar toda apelación a presupuestos o consideraciones numéricas. Esta observación resulta pertinente en tanto que, algunos meses antes de la aparición de la monografía hilbertiana, Wilhelm Killing (1847-1923) desarrolló una prueba muy detallada del principio de Zolt basada esencialmente en la noción de medida de área de un polígono caracterizada por medio de *funciones integrales definidas*, es decir, definida como una función que tomaba valores numéricos. Es así evidente que esta estrategia "analítica" de prueba resultaba claramente inadecuada para los requerimientos epistemológicos y metodológicos de Hilbert, que consistían en evitar en la medida de lo posible la introducción de consideraciones numéricas en la construcción axiomática de la geometría elemental.[13]

En segundo lugar, puesto que otro objetivo explícito de Hilbert consistía en reconstruir la mayor parte posible de la geometría elemental prescindiendo de las consideraciones de continuidad, la prueba del principio de Zolt debía ser llevada a cabo *sin asumir ningún axioma de continuidad*, especialmente, el axioma de Arquímedes. Este segundo requerimiento está inmediatamente ligado, como veremos, al empleo de la relación de *equidescomposición*.

El "reto de Hilbert" en la teoría de las magnitudes poligonales consistía así en proporcionar un nuevo fundamento para esta parte central de la geometría elemental que sea a la vez *lógicamente sólido* y *estrictamente geométrico*. Que sea lógicamente sólido significaba que, a diferencia de lo que ocurría en los manuales de geometría de fines del siglo XIX, el postulado de Zolt debía ser demostrado y no simplemente asumido como un axioma. Que sea estrictamente geométrico significaba, en cambio, que dicha prueba debía ser llevada a cabo "de un modo elemental", es decir, evitando toda referencia fundamental a presupuestos y consideraciones numéricas; especialmente, la noción de medida de área debía ser introducida de un modo puramente geométrico y por lo tanto no como una función que toma valores numéricos. En lo que resta del artículo nos ocuparemos de analizar cómo Hilbert llevó a cabo esta tarea.

[13] Más detalles de esta prueba se encuentran en Killing 1898.

6. *La teoria del área en* Fundamentos

6.1. Equivalencia de polígonos y continuidad

Como resultaba habitual en los manuales de geometría de fines del siglo XIX, Hilbert comienza su construcción de la teoría del área plana estableciendo los teoremas fundamentales sobre la equivalencia de polígonos. Más precisamente, tras ofrecer definiciones precisas de los conceptos de polígono (simple), descomposición y composición o suma de polígonos, Hilbert introduce *dos* nociones de la relación de igualdad de área, a saber: la ya conocida relación de "equidescomposición" (*Zerlegungsgleichheit*) y la relación de "equicomplementariedad" (*Ergänzungsgleichheit*).

> *Definición*. Dos polígonos simples se llaman *equidescomponibles* cuando se pueden descomponer en un número finito de triángulos, los cuales son congruentes entre sí por parejas.
> *Definición*. Dos polígonos simples *P* y *Q* se llaman *equicomplementarios* cuando se les puede agregar un número finito de parejas de polígonos *equidescomponibles P'*, *Q'*; *P''*, *Q''*; … ; *P'''*, *Q'''*, tal que los polígonos resultantes *P* + *P'* + *P''* + … + *P'''* y *Q* + *Q'* + *Q''* + … + *Q'''* sean equidescomponibles (Hilbert 1999: 70).[14]

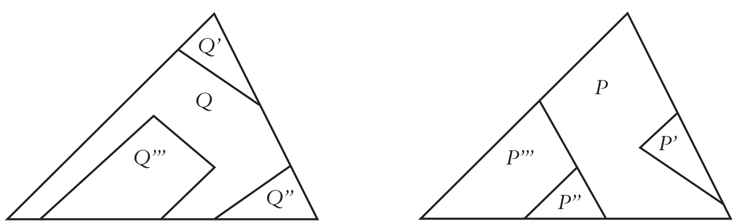

Figura 3: Polígonos equicomplementarios.

En cierto sentido, Hilbert recupera con sus dos nociones de "equivalencia" la estrategia de Euclides para el estudio de las áreas. Es decir, el concepto de equidescomposición representa el criterio que establece la igualdad

[14] Hilbert introdujo el término "equidescomposición" *(Zerlegungsgleichheit)* en la segunda edición de *Fundamentos*, en 1903; en la primera edición utiliza en cambio el término "igualdad de superficie" *(Flächengleichheit)*. Por otro lado, la expresión "equicomplementariedad" *(Ergänzungsgleichheit)* aparece por primera vez en la séptima edición, en 1930. En las ediciones anteriores emplea la expresión "igualdad de contenido" *(Inhaltsgleichheit)*.

de área de dos figuras planas a partir de mostrar que dichas figuras pueden ser obtenidas por medio de la operación de *sumarles* pares de figuras respectivamente congruentes, operación que Euclides fundaba en la aplicación de la noción común 2. Por esta razón, la relación de equidescomposición fue también referida como *igualdad por suma*. En cambio, la noción de equicomplementariedad expresa el criterio que determina la igualdad de área de un par de polígonos sobre la base de exhibir que tales figuras son el resultado de efectuar la operación de *quitarles* pares de polígonos respectivamente congruentes a otro par de polígonos iguales en área; en la teoría de Euclides, este criterio de igualdad de área estaba basado en la aplicación de la noción común 3. Por esta razón, la relación de equicomplementariedad fue también conocida como *igualdad por diferencia*.[15]

Ahora bien, luego de probar que las relaciones de "equidescomposición" y "equicomplementariedad" satisfacen la propiedad transitiva,[16] Hilbert las utiliza para formular algunos de los teoremas fundamentales sobre la equivalencia de triángulos y paralelogramos de la siguiente manera:

> *Teorema 44.* Dos paralelogramos de igual base e igual altura son *equicomplementarios*.
> *Teorema 45.* Un triángulo *ABC* es siempre *equidescomponible* con un cierto paralelogramo de igual base y mitad altura.
> *Teorema 46.* Dos triángulos con igual base e igual altura son equicomplementarios (Hilbert 1999: 71-72. El énfasis es mío).

Hilbert se ocupa de probar solo el segundo de estos teoremas y se limita a señalar que "la manera de razonar de Euclides" permite demostrar con facilidad los dos teoremas restantes (Hilbert 1999: 71). Sin embargo, se plantea aquí la pregunta respecto de si las nociones de "equidescomposición" y "equicomplementariedad" son equivalentes, es decir, de si por ejemplo la proposición "dos paralelogramos de igual base e igual altura son *equidescomponibles*" es también válida. Recurriendo a su novedosa técnica de construcción de "modelos" analíticos de los axiomas geométricos, Hilbert consiguió ofrecer una respuesta precisa a este interrogante, al mostrar que las relaciones de equidescomposición y equicomplementariedad son equivalentes *únicamente* si se presupone la validez del axioma de Arquímedes. Por medio de la construcción

[15] Sobre estas designaciones alternativas véase Amaldi 1900.
[16] De esta manera, Hilbert prueba que estas relaciones de igualdad de área son *relaciones de equivalencia*, puesto que las propiedades reflexiva y simétrica son consecuencias inmediatas de las definiciones.

de un modelo de una *geometría no arquimedeana*, Hilbert logró mostrar cómo es posible que dos triángulos (y lo por tanto dos paralelogramos) sean equicomplementarios, pero no equidescomponibles. Este resultado permite explicar por qué decidió utilizar en su reconstrucción de la teoría del área en el plano *dos conceptos* de equivalencia de polígonos, en lugar de utilizar solo la noción de equidescomposición, como ocurría en todos los textos de geometría de la época. La introducción del concepto de equicomplementariedad obedece a su objetivo epistemológico y metodológico central de reconstruir la mayor parte posible de la geometría elemental sin asumir ningún axioma de continuidad, en particular el axioma de Arquímedes.

Los restantes conocidos teoremas sobre la *equicomplementariedad* de los polígonos planos, especialmente el teorema de Pitágoras, son una consecuencia inmediata de los teoremas recién mencionados; en particular, ello puede ser llevado a cabo sin asumir la validez del axioma de Arquímedes. Por ejemplo, Hilbert indica cómo de aquellos teoremas se sigue inmediatamente el importante teorema según el cual a todo polígono simple, y en particular a todo triángulo, se le puede hacer corresponder un rectángulo equicomplementario con una base *b* fija dada (véase Hilbert 1999: Teorema 47). Sin embargo, estos teoremas sobre la equicomplementariedad no resultan de utilidad para obtener la problemática prueba de la proposición fundamental I.39 de *Elementos*, que Hilbert reformula ahora en su teoría de la siguiente manera:

> *Teorema 48.* Si dos triángulos equicomplementarios tienen bases iguales, entonces tienen también igual altura (Hilbert 1999: 74).

Con la formulación de este teorema, Hilbert está en condiciones de abocarse a la tarea de resolver el *desafío central* en la fundamentación de la teoría del área plana, a saber: mostrar cómo es posible fundar *relaciones de desigualdad entre los polígonos planos*, pero respetando el requerimiento de que el postulado de Zolt sea demostrado como un *teorema* de la teoría; más aún, dicha prueba debía ser llevada de un modo estrictamente geométrico y sin asumir el axioma de Arquímedes.

6.2. La demostración del "axioma de Zolt"

Hilbert advierte en primer lugar que para llevar a cabo una demostración del "axioma de Zolt", la noción de equivalencia geométrica –más específicamente, de equicomplementariedad– no es suficiente, sino que además resulta necesaria la introducción del concepto métrico de *medida de área*. Dicho concepto, sin embargo, es definido de un modo *puramente geométrico*. Para ello Hilbert se apoya en dos importantes resultados previamente alcanzados en *Fundamentos*, i.e., la aritmética o cálculo de segmentos lineales *(Streckenrechnung)* y la teoría de las proporciones y los triángulos semejantes. Por un lado, Hilbert mostró que una vez que las operaciones de suma y multiplicación de segmentos lineales son definidas de un modo adecuado y puramente geométrico, es posible utilizar los teoremas clásicos de Desargues y Pascal (Pappus) para probar que dichas operaciones satisfacen todas las operaciones de un cuerpo ordenado. Por otro lado, esta construcción puramente geométrica de un conjunto de elementos geométricos que satisface la estructura de un cuerpo ordenado le permitió ofrecer una definición adecuada de proporcionalidad entre segmentos lineales y reconstruir la teoría de los triángulos semejantes, sin presuponer ningún axioma de continuidad, especialmente el axioma de Arquímedes.

En su fundamentación de la teoría de la medida de las magnitudes poligonales, Hilbert parte de la definición de la *función de medida de área* de triángulos, para luego definir a partir de estos la medida de área de polígonos planos. La definición de medida de área de triángulos se corresponde con la fórmula habitual, que utiliza como unidad de medida al cuadrado de lado unidad. Una novedad de esta definición es, sin embargo, que la función de medida no asocia a cada triángulo en el plano un número real positivo, sino que toma como valores a los elementos del cuerpo ordenado de la aritmética de segmentos. La medida de área de un triángulo es definida como un *segmento característico s*, que se obtiene al realizar el semiproducto de la base por la altura correspondiente. En otras palabras, una virtud fundamental de la definición de Hilbert es que permite *medir* las áreas de los polígonos por medio de otros *elementos geométricos* como los segmentos lineales, pero conservando las fórmulas habituales para calcular la medida de área de las distintas figuras rectilíneas planas.

Una tarea central en la introducción de esta definición cosiste en probar que dicha función está *bien definida*, en el sentido de que la medida de área de un triángulo es independiente del lado que se tome como base y de la altura correspondiente. Para ello Hilbert apela a su definición de proporcionalidad entre segmentos y a los conocidos teoremas sobre la semejanza de triángulos. Recordemos que en *Fundamentos* la proporcionalidad de segmentos es definida de la siguiente manera:

> *Definición*. Si a, b, a', b' son cuatro segmentos lineales, entonces la proporción $a{:}b = a'{:}\,b'$ no denota sino la igualdad de segmentos lineales $ab' = a'b$ (Hilbert 1999: 64).

Con esta definición se explica *qué significa geométricamente* que dos pares de segmentos son proporcionales, esto es, la igualdad del producto de dos pares de segmentos lineales. Es importante mencionar que esta definición descansa esencialmente en la *propiedad conmutativa* del producto de segmentos lineales, que Hilbert prueba con la ayuda del teorema de Pascal y sin asumir en ningún momento la validez del axioma de Arquímedes.

Volviendo a la definición de medida de área de un triángulo, consideremos un triángulo cualquiera ABC y tracemos las alturas $h_a = AD$ y $h_b = BE$ (figura 4). De la semejanza de los triángulos BCE y ACD se sigue la siguiente proporción:

$$a : h_b = b : h_a.$$

Dada la definición de proporcionalidad propuesta por Hilbert, la proporción anterior significa que $a.h_a = b.h_b$, lo cual prueba que la medida de área de un triángulo es independiente del lado escogido como base.

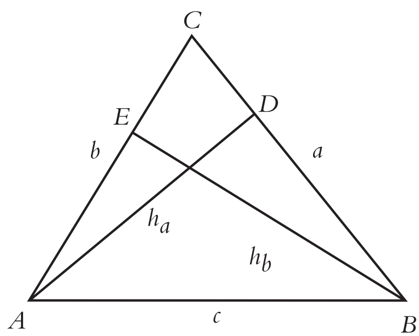

Figura 4: Medida de área de triángulos.

A la medida de área de un triángulo Hilbert le asigna además un *signo*, en virtud de que el *contorno del triángulo* sea recorrido en sentido positivo o negativo. En símbolos, la medida de área del triángulo ABC recorrido en sentido positivo se designa como $[ABC]$, de donde se sigue que $[CBA] = - [ABC]$. La medida de un triángulo ABC, recorrido en sentido positivo, es por lo tanto un *segmento positivo s*. La orientación asignada a los triángulos es esencial para garantizar una propiedad fundamental de la función de medida de área, a saber: dado un triángulo cualquiera T, recorrido en sentido positivo, la medida de área de T, es siempre *positiva*. Del mismo modo, de la definición anterior de medida de área de un triángulo también se sigue inmediatamente que si T y T' son triángulos congruentes, entonces T y T' tienen la misma medida de área.

Ahora bien, la posibilidad de descomponer a todo polígono en triángulos de un modo completamente determinado conduce a la definición de su medida de área: se llama medida de área de un polígono (en sentido positivo) a la *suma de las medidas de área de los triángulos* (recorridos en sentido positivo) en las que queda dividido por una determinada descomposición. El *núcleo* de la teoría de la medida de área poligonal, y ciertamente la tarea que ofrece mayores dificultades, consiste nuevamente en probar que dicha función de medida está bien definida, i.e., que la medida de área queda unívocamente determinada por el polígono o es independiente del modo de descomposición en triángulos utilizado para calcularla.[17]

La dificultad recién mencionada para demostrar que la función de medida de área de polígonos está bien definida se aprecia además en el hecho de que dicha prueba sufrió modificaciones considerables en las sucesivas ediciones de *Fundamentos*.[18] A los efectos de nuestro examen, bastará sin embargo con indicar lo siguiente: el esquema general adoptado por Hilbert en esta demostración consiste en mostrar que la definición de medida de área de triángulos satisface también la *propiedad aditiva*, es decir, que si se descompone un triángulo en un número finito k de triángulos parciales, la suma de las medidas de áreas de estos k triángulos (en sentido positivo) es igual a la medida de área del triángulo original (recorrido en sentido positivo). Esta propiedad fundamental de la medida de área de los triángulos permite probar, por medio de un razonamiento puramente geométrico, que todo polígono determina unívocamente su medida de área, independientemente de la triangulación escogida para calcularla. En efecto, sean T_1 y T_2 dos triangulaciones distintas de un mismo polígono P. Es claro que cada triángulo de una descomposición queda descompuesto en polígonos por los segmentos pertenecientes a la otra descomposición. Añadamos entonces todos los segmentos que sean necesarios para que cada uno de estos polígonos quede descompuesto, a su vez, en triángulos. Evidentemente, las dos triangulaciones T_1 y T_2 quedan a su vez descompuestas en exactamente *los mismos triángulos*, de donde se sigue inmediatamente (por la propiedad aditiva) que ambas arrojan la *misma medida de área*.

Puesto que se ha mostrado que triángulos congruentes tienen la misma medida de área y que la función de medida de área de polígonos

[17] Las dificultades que conlleva la demostración de que la función de medida de área de un polígono plano está bien definida son estudiadas en los manuales contemporáneos como, por ejemplo, Moise 1974 y Hartshorne 2000.

[18] Las modificaciones más importantes que efectuó Hilbert al capítulo IV de *Fundamentos* son mencionadas en Hilbert 1971.

satisface la propiedad aditiva, se sigue de la definición de medida de área de polígonos que: si dos polígonos son *equidescomponibles*, entonces tienen igual medida de área; y además que, si dos polígonos son *equicomplementarios*, entonces tienen igual medida de área. Pero esta relación de implicación entre los conceptos de equidescomposición y equicomplementariedad y la noción de medida de área permite probar muy fácilmente la problemática proposición I.39 de *Elementos*, que en la reconstrucción hilbertiana consiste en afirmar que, si dos triángulos equicomplementarios tienen la misma base, entonces tienen también igual altura (Teorema 48). En efecto, si llamamos b a la base de los triángulos y designamos a las alturas correspondencia por h y h', entonces de la suposición de que los triángulos son equicomplementarios se deduce que tienen igual medida de área, es decir,

$$\tfrac{1}{2}\, bh = \tfrac{1}{2}\, bh'.$$

De esta igualdad se sigue entonces inmediatamente que h y h' son iguales, es decir, que los triángulos tendrán necesariamente igual altura. Por otro lado, Hilbert también prueba que la recíproca de la afirmación anterior es válida, es decir, *si dos polígonos tienen igual medida de área, entonces también son equicomplementarios*. Aunque en *Fundamentos* no aparece explicitado debidamente, esta última afirmación era ya conocida en aquella época como el *teorema de Gerwien*.[19] De este modo, se establece una coimplicación entre los conceptos de equicomplementariedad y medida de área; es decir, dos polígonos tienen igual medida de área si y solo si son equicomplementarios (Teorema 51). Pero esta coimplicación permite alcanzar la prueba buscada del postulado de Zolt, que Hilbert formula de la siguiente manera:

> *Teorema 52 (Axioma de Zolt).* Si se descompone un rectángulo en diversos triángulos por medio de rectas, y si se separa solamente uno de estos triángulos, entonces no puede completarse el rectángulo con los restantes triángulos (Hilbert 1999: 79).

En efecto, si un polígono Q está contenido completamente (o es una parte propia) de otro polígono P, entonces P está compuesto por Q más otro polígono que podemos llamar R. Además, puesto que $[P]= [Q] + [R]$ (propiedad aditiva) y que la medida de área de un polígono (recorrido en

[19] En la actualidad, este teorema se conoce como el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien.

sentido positivo) es siempre mayor que 0, entonces se tiene que $[P] > [Q]$. Pero por el teorema anterior (i.e., el teorema 51), P no puede ser entonces equicomplementario con Q. Es claro así que el postulado de Zolt constituye un caso especial de este resultado, con lo cual se llega a concluir la demostración buscada.

Con la demostración del postulado de Zolt, Hilbert proporciona un fundamento sólido para la teoría del área en el plano. Sin embargo, cabe señalar que dicha demostración hace un uso esencial de la noción de medida de área, aunque ciertamente definida de un modo puramente geométrico; de esta manera, se llega a probar una proposición que se refiere a la equivalencia de las figuras planas, *por medio de una medida*.

7. *Consideraciones finales*

Para finalizar resultará oportuno realizar unas breves reflexiones sobre algunas de las consecuencias epistemológicas y metodológicas más significativas de las contribuciones técnicas de Hilbert en la fundamentación de la teoría de las magnitudes poligonales.

Hemos visto que las discusiones de fines del siglo XIX en torno a la teoría geométrica de la equivalencia, que en gran medida motivaron las investigaciones de Hilbert, estaban inmediatamente vinculadas a la preocupación por el esclarecimiento conceptual de la noción de magnitud en general y de magnitud geométrica en particular. En este contexto, un problema central para estos geómetras consistía en *probar* que, dadas las relaciones de equivalencia y no equivalencia, y la operación de suma de polígonos, el conjunto de los polígonos planos satisfacía todos las propiedades de las magnitudes; es decir, el problema indagado consistía en demostrar que el conjunto de los polígonos en el plano constituye una clase de magnitud. Asimismo, el núcleo de este problema residía en hallar una prueba adecuada del postulado de Zolt, en tanto que esta proposición permitía garantizar la validez de la ley de tricotomía.

La primera caracterización "axiomática" del concepto de magnitud, que además sirvió de referencia para las discusiones que hemos analizado, se encuentra en Stolz 1885. De acuerdo con los axiomas para magnitudes formulados por Stolz, un conjunto de elementos (geométricos) constituye una clase de magnitud si es posible definir para ellos: *i)* una relación (binaria) de "igualdad" que satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva; *ii)* una operación de "suma" que satisface las propiedades uniforme, conmutativa, asociativa y modular (i.e., existencia de elemento nulo); *iii)* una relación (binaria) de desigualdad que cumple las leyes de tricotomía, monotonía y transitividad, utilizando terminología moderna. Durante la primera década del siglo XX se formularon diversos sistemas de axiomas alternativos para el concepto de magnitud. El más influyente fue quizás el de Huntington (1902).

Ahora bien, la demostración de que los polígonos planos representan una clase de magnitud debía respetar el requerimiento fundamental de *no utilizar* el concepto de *medida de área*. La posición defendida por estos geómetras era que la teoría de la medida de área *se fundaba en* o *presuponía* la teoría de la equivalencia en al menos dos sentidos. Por un lado, los procedimientos habituales para el cálculo de la medida de área de las figuras poligonales, que tomaban al cuadrado de lado unidad como unidad de medida, recurrían a la descomposición de polígonos *en suma de otros*.[20] Por ejemplo, la fórmula para calcular la medida de área de un triángulo era una consecuencia inmediata del teorema según el cual todo triángulo es *equidescomponible* con un paralelogramo con la misma base y la mitad de altura. Por otro lado, un análisis del concepto de medida de área de una figura rectilínea plana revelaba que aquello que se mide es la *cantidad de superficie* o *extensión superficial* correspondiente, es decir, la cantidad de la magnitud específica de los polígonos planos. En consecuencia, la teoría de la medida de área de las figuras (rectilíneas) planas presuponía el hecho fundamental de que se haya demostrado previamente que las áreas poligonales satisfacen todas las propiedades que definen una clase de magnitud (escalar).[21] Luego, una construcción rigurosa y lógicamente sólida de la teoría de la medida de área requería que se proporcionara una demostración de este hecho fundamental, y para no caer en una clara *petitio principii*, dicha prueba no podía presuponer los resultados de la propia teoría de la medida de área, sino que debía basarse en la teoría de la equivalencia geométrica.

El examen que hemos llevado a cabo de la construcción de la teoría del área plana desarrollada por Hilbert en *Fundamentos* revela que, en un sentido estricto, esta *no* constituye una respuesta completamente adecuada al problema de representar a los polígonos planos como una clase de magnitud, utilizando exclusivamente la teoría de la equivalencia. En efecto, si bien la prueba del "axioma de Zolt" que proporciona Hilbert puede considerarse como "puramente geométrica", en el sentido en que no presupone la introducción de consideraciones numéricas (y de supuestos de continuidad), el recurso a la noción de medida de área es allí esencial. El requerimiento metodológico, habitual en los tratados de geometría de fines del siglo XIX, de proporcionar primero un fundamento para el concepto de área poligonal

[20] Esta tesis fue expresada, en otros, por Duhamel 1878: 376.
[21] Esta posición puede apreciarse, por ejemplo, en Stolz 1885, 1894 y Schur 1892.

exclusivamente sobre la base de la teoría de equivalencia para solo después desarrollar la teoría de la medida de área, no es alcanzado en *Fundamentos*.

Por otra parte, este recurso a la noción de medida de área en la prueba del postulado de Zolt puede ser también analizado en relación al requerimiento de la *pureza de los métodos de prueba*, de gran relevancia en las investigaciones axiomáticas de Hilbert. En uno de sus cursos sobre geometría euclidiana, este requerimiento es caracterizado de la siguiente manera:

> Nos encontramos por tanto por primera vez en la posición de llevar a la práctica una crítica de los medios de una prueba (*die Hülfsmittel eines Beweises*). En la matemática moderna tal crítica es realizada muy a menudo, donde el objetivo es preservar la pureza del método, i.e., *en la prueba de un teorema se deben utilizar, en la medida de lo posible, solo aquellos medios que son sugeridos por el contenido del teorema*. (Hilbert 1898: 317. El énfasis es mío)

Esquemáticamente, la noción de "pureza" aquí aludida hace referencia a una determinada relación de preferencia entre los recursos utilizados para probar un teorema o resolver un problema y los recursos necesarios para entender o comprender tal teorema o problema. Una demostración "pura" tiene lugar cuando los recursos o métodos empleados en ella son intrínsecos o inherentes al teorema demostrado o al problema resuelto, i.e., cuando los métodos son sugeridos por el "contenido" de la proposición en cuestión.[22] En tanto que el postulado de Zolt se refiere en un sentido estricto *solo* a la imposibilidad de que un polígono sea *equivalente* a otro propiamente contenido en él, la noción de medida de área no parece estar sugerida o implicada directamente en su contenido. Ello plantea entonces el problema de determinar en qué sentido se puede considerar como "pura" una demostración del postulado de Zolt en la que se apele de un modo esencial al concepto métrico de medida de área, *independientemente* de la manera en que este sea definido. La indagación de las condiciones necesarias y suficientes para llevar a cabo una demostración rigurosa de la mentada proposición geométrica constituye un nuevo y original caso de estudio para las discusiones filosóficas actuales en torno a la pureza de los métodos de prueba en la geometría elemental.

Finalmente, es importante observar que es posible que nos estemos enfrentando aquí a una *limitación* fundamental en la construcción de la teoría

[22] *Cf.* Detlefsen y Arana (2011). Sobre la nocíon de "contenido" aludida en las discusiones filosóficas sobre la pureza de los métodos de prueba, véase Hallett (2008) y Arana y Mancosu (2012).

de las magnitudes poligonales. De acuerdo con Hartshorne (2000: 210) y Volkert (2015: 39), todas las pruebas del "axioma" de Zolt que se conocen en la actualidad se basan esencialmente en la introducción del concepto de medida de área. Sin embargo, en el caso de que esta aparente *imposibilidad* de demostrar el axioma de Zolt con independencia del concepto de medida de área sea efectivamente demostrada, ello constituiría una limitación esencial para la aspiración de proporcionar un fundamento lógicamente sólido para la teoría del área solo sobre la noción geométrica de "equivalencia". La pregunta por la imposibilidad de probar el postulado de Zolt exclusivamente *dentro de* la teoría geométrica de la equivalencia constituye un interesante interrogante para los fundamentos de la geometría elemental, cuya significación epistemológica y metodológica merece ser explorada sin dudas con mayor atención.[23]

BIBLIOGRAFÍA

Amaldi, U. (1900), "Sulla teoria dell'equivalenza", en Enriques (1900: 103-142).

Arana, A. y Mancosu, P. (2012), "On the Relationship between Plane and Solid Geometry", *The Review of Symbolic Logic,* 5: 294-353.

Detlefsen, M. y Arana, A. (2011), "Purity of Methods", *Philosophers' Imprint,* 11: 1-20.

Duhamel, J. (1878), *Des méthodes dans les sciences de raisonnement : Deuxième partie* (Paris: Gauthier Villars).

Enriques, F. (1900) (comp.), *Questioni riguardanti la geometria elementare* (Bologna: Ditta Nicola Zanichelli).

Enriques, F. y Amaldi, U. (1903), *Elementi di geometrie ad uso delle scuole secondarie superiori* (Bologna: Ditta Nicola Zanichelli).

Euclides (2007), *Elementos*, traducción y notas de M. L. Puertas Castaño (Madrid: Gredos).

Ewald, W. y Sieg, W. (2013), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917-1933* (Berlin: Springer).

Faifofer, A. (1880), *Elementi di geometria* (Venezia: Tipografia Emiliana, 7ª ed., 1890).

Ferreirós, J. (2007), *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics* (Berlin: Birhäuser).

Gerwien, P. (1833), "Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke", *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 10: 228-234.

[23] Quisiera expresar aquí mi agradecimiento al evaluador de la *Revista Latinoamericana de Filosofía* por las sugerencias y comentarios recibidos.

Hallett, M. (2008), "Reflections on the Purity of Method in Hilbert's 'Grundlagen der Geometrie'" en Mancosu (2008: 198-255).

Hallett, M. y Majer, U. (2004) (comps.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902* (Berlin: Springer).

Hartshorne, R. (2000), *Geometry: Euclid and Beyond* (New York: Springer).

Hilbert, D. (1898), "Elemente der Euklidischen Geometrie", en Hallett y Majer (2004: 304-402).

Hilbert, D. (1899), "Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen", en Hallett y Majer (2004: 435–526).

Hilbert, D. (1903), *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig: Teubner, 2ª ed.).

Hilbert, D. (1905), *Logische Principien des mathematischen Denkens*. Ms.Vorlesung SS 1905. Ausgearbeitet von E. Hellinger, Bibliothek des mathematischen Seminars, Universität Göttingen.

Hilbert, D. (1917), "Prinzipien der Mathematik", en Ewald y Sieg (2013: 59-214).

Hilbert, D. (1930), *Grundlagen der Geometrie* (Berlin: Teubner, 7ª ed.).

Hilbert, D. (1971), *Les fondements de la géométrie*, traducción de P. Rossier (Paris: Dunod).

Hilbert, D. (1996), *Fundamentos de la geometría*, traducción de J. M. Sánchez Ron (Madrid: CSIC).

Hilbert, D. (1999), *Grundlagen der Geometrie,* mit Supplementen von Paul Bernays, herausgegeben und mit Anhängen versehen von Michael Toepell (Leipzig: Teubner, 14ª ed.).

Huntington, E. (1902). "A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitude", *Transactions of the American Mathematical Society*, 3: 264-279.

Killing, W. (1898), *Einführung in die Grundlagen der Geometrie,* Zweiter Band (Paderborn: Ferdinand Schöningh).

Legendre, A. (1806), *Eléments de géométrie* (Paris: Didot).

Mancosu, P. (1996), *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century* (New York: Oxford University Press).

Mancosu, P. (2008) (comp.), *The Philosophy of Mathematical Practice* (New York, Oxford University Press).

Moise, E. (1974), *Elementary Geometry from an advanced Standpoint* (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley).

Paolis, R. (1884), *Elementi di geometria* (Torino: Loescher).

Puig Adam, P. (1980), *Curso de geometría métrica* (Madrid: Euler).

Schur, F. (1892), "Über den Flächeninhalt geradlinig begrenzter ebener Figuren", *Sitzungsberichte der Dorpater Naturforschenden Gesellschaft,* 10: 2-6.

Stolz, O. (1885), *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Erster Theil: Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen* (Leipzig: Teubner).

Stolz, O. (1894), "Die eben Vielecke und die Winkel mit Einschluss der Berührung-Winkel als Systeme von absoluten Grössen", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 5: 233-240.

Volkert, K. (1999), "Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone: einige Schritte in der Mathematisierung eines anschaulichen Konzeptes", *Mathematische Semesterberichte*, 46: 1-28.

Volkert, K. (2010), "Le tout est-il toujours plus grand que la partie?", *Revue d"histoire des mathématiques,* 16 (2): 287-306.

Volkert, K. (2015), *David Hilbert: Grundlagen der Geometrie* (Berlin: Springer).

Zolt, A. (1881), *Principii della eguaglianza di poligoni preceduti da alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geométrica* (Milano: Briola).

Recibido: 05-2017; aceptado: 11-2017